Matemática

Aluno

Caderno de Atividades Pedagógicas de Aprendizagem Autorregulada - 03

3ª Série | 3° Bimestre

Disciplina	Curso	Bimestre	Série
Matemática	**Ensino Médio**	**2°**	**3ª**
Habilidades Associadas			
1. Identificar e conceituar a unidade imaginária.			
2. Identificar o conjunto dos números complexos e representar um número complexo na forma algébrica.			
3. Calcular expressões envolvendo as operações com números complexos na forma algébrica.			
4. Resolver problemas utilizando o cáculo da distância entre dois pontos.			
5. Identificar e determinar as equações geral e reduzida de uma reta.			

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SOMANDO FORÇAS
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO

Apresentação

A Secretaria de Estado de Educação elaborou o presente material com o intuito de estimular o envolvimento do estudante com situações concretas e contextualizadas de pesquisa, aprendizagem colaborativa e construções coletivas entre os próprios estudantes e respectivos tutores – docentes preparados para incentivar o desenvolvimento da autonomia do alunado.

A proposta de desenvolver atividades pedagógicas de aprendizagem autorregulada é mais uma estratégia pedagógica para se contribuir para a formação de cidadãos do século XXI, capazes de explorar suas competências cognitivas e não cognitivas. Assim, estimula-se a busca do conhecimento de forma autônoma, por meio dos diversos recursos bibliográficos e tecnológicos, de modo a encontrar soluções para desafios da contemporaneidade, na vida pessoal e profissional.

Estas atividades pedagógicas autorreguladas propiciam aos alunos o desenvolvimento das habilidades e competências nucleares previstas no currículo mínimo, por meio de atividades roteirizadas. Nesse contexto, o tutor será visto enquanto um mediador, um auxiliar. A aprendizagem é efetivada na medida em que cada aluno autorregula sua aprendizagem.

Destarte, as atividades pedagógicas pautadas no princípio da autorregulação objetivam, também, equipar os alunos, ajudá-los a desenvolver o seu conjunto de ferramentas mentais, ajudando-o a tomar consciência dos processos e procedimentos de aprendizagem que ele pode colocar em prática.

Ao desenvolver as suas capacidades de auto-observação e autoanálise, ele passa ater maior domínio daquilo que faz. Desse modo, partindo do que o aluno já domina, será possível contribuir para o desenvolvimento de suas potencialidades originais e, assim, dominar plenamente todas as ferramentas da autorregulação.

Por meio desse processo de aprendizagem pautada no princípio da autorregulação, contribui-se para o desenvolvimento de habilidades e competências fundamentais para o aprender-a-aprender, o aprender-a-conhecer, o aprender-a-fazer, o aprender-a-conviver e o aprender-a-ser.

A elaboração destas atividades foi conduzida pela Diretoria de Articulação Curricular, da Superintendência Pedagógica desta SEEDUC, em conjunto com uma equipe de professores da rede estadual. Este documento encontra-se disponível em nosso site www.conexaoprofessor.rj.gov.br, a fim de que os professores de nossa rede também possam utilizá-lo como contribuição e complementação às suas aulas.

Estamos à disposição através do e-mail curriculominimo@educacao.rj.gov.br para quaisquer esclarecimentos necessários e críticas construtivas que contribuam com a elaboração deste material.

Secretaria de Estado de Educação

Caro aluno,

Neste documento você encontrará atividades relacionadas diretamente a algumas habilidades e competências do 3° Bimestre do Currículo Mínimo. Você encontrará atividades para serem trabalhadas durante o período de um mês.

A nossa proposta é que você, Aluno, desenvolva estes Planos de Curso na ausência do Professor da Disciplina por qualquer eventual razão. Estas atividades foram elaboradas a partir da seleção das habilidades que consideramos essenciais da 3° Série do Ensino Médio no 3° Bimestre.

Este documento é composto de um texto base, na qual através de uma leitura motivadora você seja capaz de compreender as principais ideias relacionadas a estas habilidades. Leia o texto, e em seguida resolva as Ficha de Atividades. As Fichas de atividades devem ser aplicadas para cada dia de aula, ou seja, para cada duas horas/aulas. Para encerrar as atividades referentes a cada bimestre, ao final é sugerido uma pesquisa sobre o assunto.

Para cada Caderno de Atividades, iremos ainda fazer relações diretas com todos os materiais que estão disponibilizados em nosso site *Conexão Professor*, fornecendo, desta forma, diversos materiais de apoio pedagógico para que o Professor aplicador possa repassar para a sua turma.

Neste Caderno de Atividades, vamos ampliar nosso conhecimento sobre os conjuntos numéricos e iremos trabalhar com os Números Complexos. Já na segunda parte vamos dar início ao estudo da Geometria Analítica. Consideramos esse estudo de grande relevância, não apenas pelo conteúdo em si, mas também por estar presente na maioria das avaliações em nível estadual e nacional.

Este documento apresenta 06 (seis) aulas. As aulas são compostas por uma **explicação base**, para que você seja capaz de compreender as principais ideias relacionadas às habilidades e competências principais do bimestre em questão, e **atividades** respectivas. Leia o texto e, em seguida, resolva as Atividades propostas. As Atividades são referentes a um tempo de aula. Para reforçar a aprendizagem, propõe-se, ainda, uma **avaliação** e uma **pesquisa** sobre o assunto.

Um abraço e bom trabalho!

Equipe de Elaboração.

Sumário

Aula 1: O conjunto dos Números Complexos

Na aula de hoje, vamos estudar o Conjunto dos Números Complexos. Quando resolvemos a equação do 2º grau, por exemplo, $x^2 + 2x + 5 = 0$, usando a Fórmula de Bháskara, encontramos:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4.1.5 = 4 - 20 = -16$$

Neste caso temos que o valor do discriminante é menor que zero ($\Delta < 0$), o que torna a solução desta equação impossível no Conjunto dos Números Reais.

A necessidade de obter a solução para este tipo de equação levou matemáticos como Girolamo Cardano (1501-1576), Friedrich Gauss (1777-1855) e René Descartes (1596 – 1650) a procurar novos conjuntos em que "o quadrado de um certo número pudesse ser negativo".

1 - UNIDADE IMAGINÁRIA:

Para ampliar o conceito de número de modo que a radiciação seja sempre possível, definimos o número i, não-real, denominado **unidade imaginária**, que satisfaz a seguinte condição:

$$i^2 = -1 \text{ ou } i = \sqrt{-1}$$

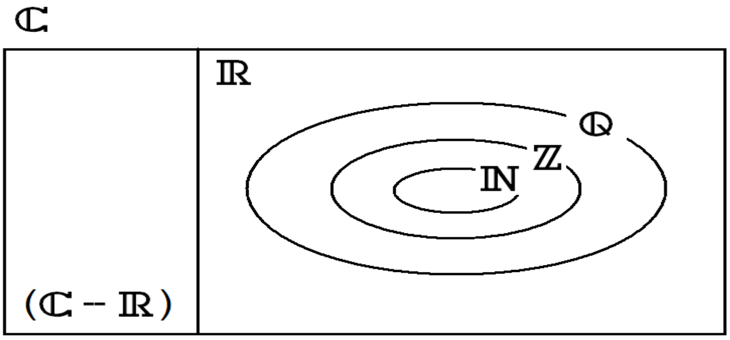
Retornando a equação anterior, temos:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2+4i}{2} = -1+2i \\ x_2 = \dfrac{-2-4i}{2} = -1-2i \end{cases}$$

Assim, esta equação tem solução no Conjunto dos Números Complexos e sua solução é:

$$S = \{1 + 2\,i, 1 - 2\,i\}$$

Assim foi criado o Conjunto dos Números Complexos, que tem a forma *z=a+bi*, onde a e b são números reais, para abrigar tais "números", conforme esquematizado a seguir:



René Descartes (1596 – 1650) foi o primeiro matemático a chamar, informalmente, $\sqrt{-1} = i$, entretanto, o matemático Leonhard Euler, em meados do século XVIII, de maneira mais sistematizada, ampliou os conjuntos numéricos, definindo que:

- O conjunto ℂ representa os números Complexos;
- O conjunto IR representa os Números Reais e este é subconjunto de ℂ;
- O conjunto (ℂ – IR) representa os Números Complexos Imaginários que não são reais;

Observe que todo número real é complexo, entretanto, nem todo número complexo é real;

EXEMPLO 01:

O número 2 + i , é um número complexo **"não-real"**, sendo $i = \sqrt{-1}$ a unidade imaginária.

EXEMPLO 02:

Usando novamente o conceito de unidade imaginária, vamos resolver a seguinte equação: $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Resolução:

Aplicando a formula de Baskára, teremos:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4.1.2 = 4 - 8 = -4$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{2+2i}{2} = 1 + i \\ x_2 = \dfrac{2-2i}{2} = 1 - i \end{cases}$$

S = {1 + i, 1 - i }

EXEMPLO 03:

Resolva a equação $x^2 + 25 = 0$.

Resolução:

Para este tipo de equação não precisamos usar a fórmula de Bháskara.

$x^2 + 25 = 0$

$x^2 = -25$

$x = \pm\sqrt{25i} = \pm\sqrt{25}\cdot\sqrt{-1} = \pm 5i$

Assim a solução é S = { +5 i, - 5 i }

2 —FORMA ALGÉBRICA:

Dado um número complexo z = a + bi, em que a e b$\in$ IR , temos:

- a é chamado <u>parte real</u> de z e indica-se a = Re(z).
- b é chamado <u>parte imaginária</u> de z e indica-se b = Im(z).

Observe alguns exemplos:

a) $Z_1 = 3 + 4i \rightarrow$ a = 3 e b = 4

b) $Z_2 = -2i \rightarrow$ a = 0 e b = −2

c) $Z_3 = 5 \rightarrow$ a = 5 e b = 0

Nota-se que se b = 0 e z = a , isto é, z é um **número real** com a parte imaginária igual a zero, sou seja, Im(z) = 0. Por outro lado se a = 0 e z = bi , isto é, z é um **imaginário puro** com parte real igual a zero, ou seja, Re(z) =0.

EXEMPLO 04:

O número complexo **1 + 2 i** tem Re(z) = 1 e Im(z) = 2.

Já o número **1 - 2 i** tem Re(z) = 1 e Im(z) = - 2.

EXEMPLO 05:

O número complexo **5i** tem Re(z) = 0 e Im(z) = 5.

Já o número complexo **- 5i** tem Re(z) = 0 e Im(z) = —5 e ambos são chamados de **imaginário puro**.

Agora vamos verificar se você aprendeu. Resolva os exercícios abaixo e em caso de dúvidas retorne aos exemplos.

Atividade 1

01. Resolva as equações a seguir:

a) $x^2 - 4x + 5 = 0$

b) $x^2 – 6x + 13 = 0$

c) $x^2 + 36 = 0$

d) $x^2 - 6x + 10 = 0$

02. Diga se o número é imaginário puro, se é um número real ou se é apenas imaginário.

a) 1 + 2i

b) - 2i

c) - 2

d) $\frac{1}{2}$

e) $-5 - 3i$

03. Para cada número complexo abaixo destaque a parte real e a parte imaginária e identifique aquele que é imaginário puro:

a) 2 + 3i

b) -1 -2i

c) - 2i

d) -5

e) -5 – 3i

04. Determine m $\in$ IR, de modo que $z = -2 + (1 - m)i$ seja um número real.

Aula 2: Plano de Argand-Gauss e potências de i

Agora que já conhecemos os números complexos, você pode estar se perguntando onde iremos construir gráficos envolvendo os números deste conjunto? Para o Conjunto dos Números Complexos teremos um plano especial para as representações gráficas. Vamos estudá-las?

1. FORMA ALGÉBRICA E REPRESENTAÇÃO NO PLANO DE ARGAND-GAUSS:

Já vimos que todo número complexo é um numero da forma a + bi, com a e b reais e i = $\sqrt{-1}$ (ou, $i^2 = -1$).

Denotamos:

- **a** de parte real, isto é, Re(z) = a;
- **b** de parte imaginária, isto é, Im(z) = b;
- **i** de unidade imaginária.

Fixando um sistema de coordenadas no plano, o complexo z = a + bi e representado pelo ponto P(a, b). O ponto P é chamado de **afixo do complexo z.** O plano no qual representamos os complexos é chamado de **Plano de Argand-Gauss**. O eixo dos x é chamado de eixo real e o eixo dos y é chamado de eixo imaginário.

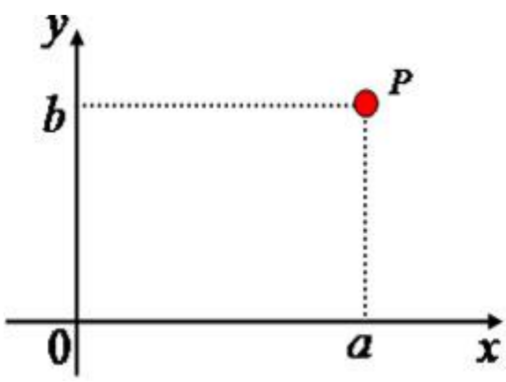


Figura 1

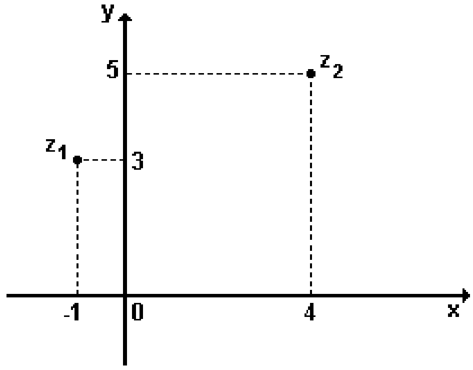
Em particular o número complexo z = a + bi é chamado: **imaginário puro** se ***a = 0 e b ≠ 0***; **imaginário** se ***a ≠ 0 e b ≠ 0*** e **real** se ***b = 0***.

EXEMPLO O1:

O números complexo $z_1 = -1 + 3i$ *tem a Re(z) =* -1 *e Im (z) = 3 e o afixo é o ponto (* -1*, 3).*

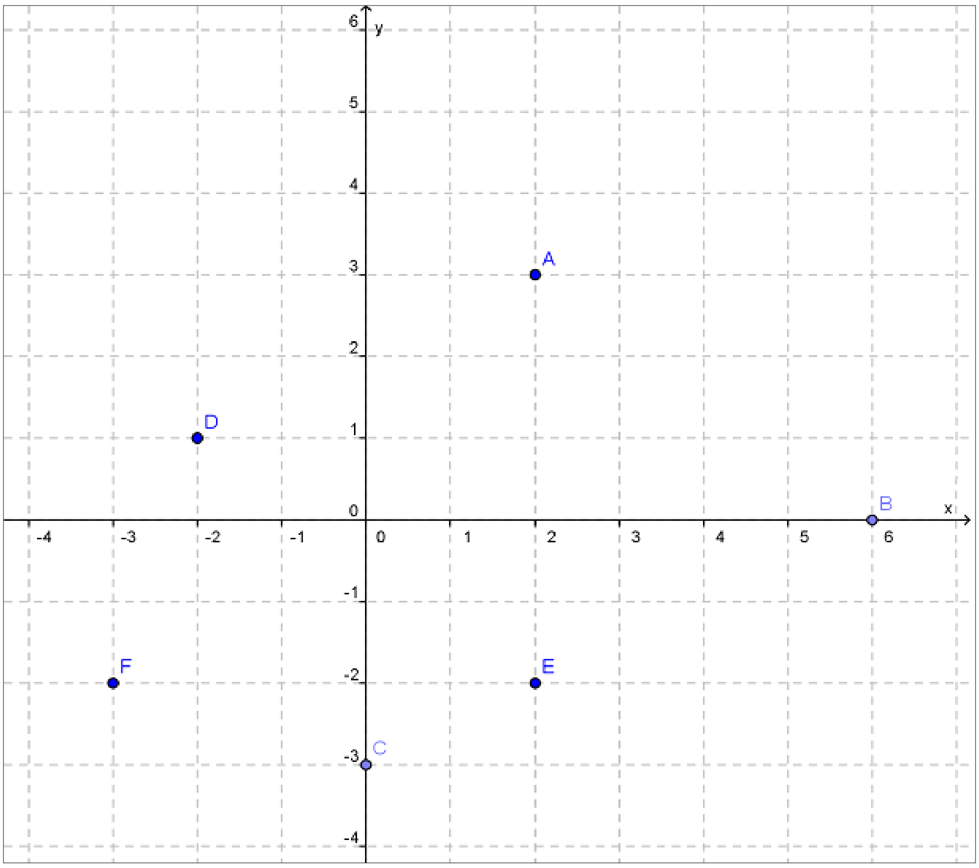
Já o números complexo $z_2 = -4 + 5i$ *tem a Re(z) = 4 e Im (z) = 5 e o afixo é o ponto (4, 5).*

Para ambos temos as seguintes representações no Plano de Argand – Gauss.

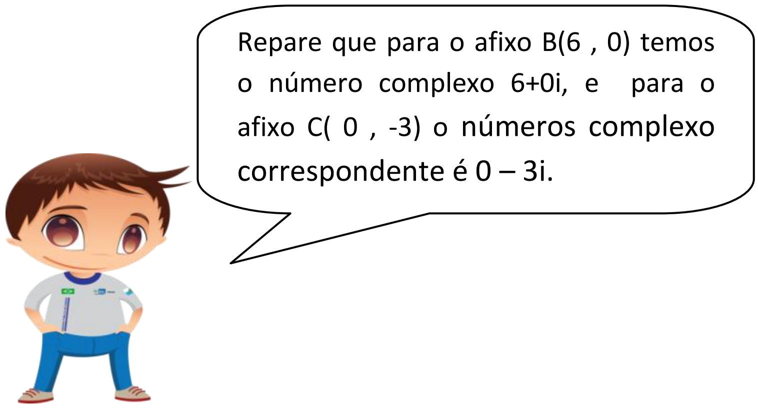


EXEMPLO 02:

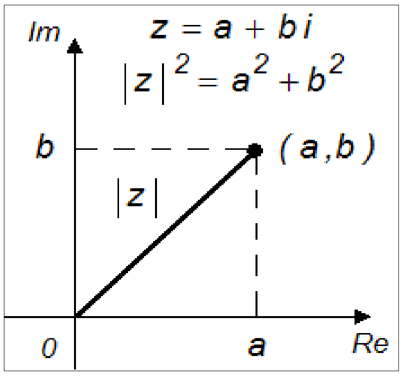
Observando o Plano de Argand- Gauss a seguir podemos destacar os seguintes números complexos e seus afixos.



Ponto afixo de z	*Números Complexos correspondentes*
A (2 ,3)	*2+3i*
B (6 ,0)	*6*
C (0 , -3)	*-3i*
D (-2 , 1)	*-2 + i*
E (2 , -2)	*2 - 2i*
F (-3, -2)	*-3 - 2i*



2 —MÓDULO DE UM NÚMERO COMPLEXO —| z|:



O Módulo |z| do número complexo z = a + bi, com a,b $\in$ IR, é a distância do afixo (a,b) ao ponto (0,0) do plano de Argand-Gauss.

Se z = a + bi então $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

EXEMPLO 03:

a) z = 3 + 4i $\Rightarrow$ $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

b) z = 6 + 2i $\Rightarrow$ $|z| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

c) z = 1 - 2i $\Rightarrow$ $|z| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

d) z = 8i $\Rightarrow$ $|z| = \sqrt{0^2 + 8^2} = \sqrt{0 + 64} = \sqrt{64} = 8$

3 —CONJUGADO:

Vamos chamar de **conjugado do complexo z = a + bi**, com a e b reais, e o complexo $\bar{z}$ = a – bi.

EXEMPLO 04:

a) z = 5 + 3i ⇒ $\bar{z}$ = *5 – 3i*

b) z = - 6 - 2i ⇒ $\bar{z}$ = *- 6 + 2i*

c) z = 10i ⇒ $\bar{z}$ = *- 10i*

d) z = 8 ⇒ $\bar{z}$ = *8*

Podemos observar no Plano de Argand-Gauss que os números complexos conjugados têm imagens simétricas em relação ao eixo real.

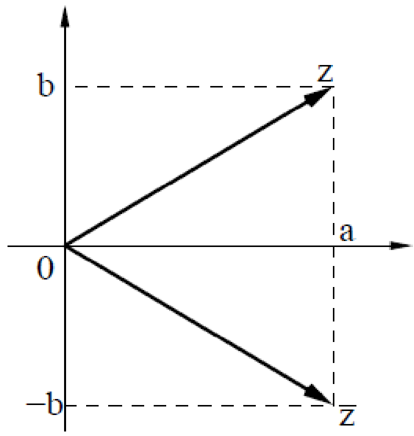


Figura 2

4 —POTÊNCIAS DE i:

Para calcular as potências i^n, com n $\in$ IN, vamos usar as propriedades de potenciação já conhecidas em ℂ e fazemos:

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \,.\, i = -i$

$i^4 = i^2 . i^2 = (-1).(-1) = 1$

$i^5 = i^4 . i = i$

$i^6 = i^4 . i^2 = -1$

$i^7 = i^4 . i^3 = -i$

$i^8 = i^4 . i^4 = 1$

$i^9 = i^8 . i = i$

$i^{10} = i^8 . i^2 = -1$

Repare que os valores de i^n se repetem de 4 em 4. Então para calcular i^n, em que $n \in IN$, basta dividir o expoente n por 4 e o novo expoente de i será o resto desta divisão.

EXEMPLO 05:

Vamos calcular i^{107} aplicando a regra acima.

Resolução:

$$\begin{array}{r|l} 107 & 4 \\ \cline{2-2} 23 & 26 \\ 3 & \end{array}$$

Sendo assim o resto da divisão de 107 por 4 é 3. Logo $i^{107} = i^3 = -i$.

EXEMPLO 06:

Agora vamos calcular i^{2050} aplicando a regra acima.

Resolução:

$$\begin{array}{r|l} 2050 & 4 \\ \cline{2-2} 05 & 512 \\ 10 & \\ 2 & \end{array}$$

Sendo assim o resto da divisão de 2050 por 4 é 2.

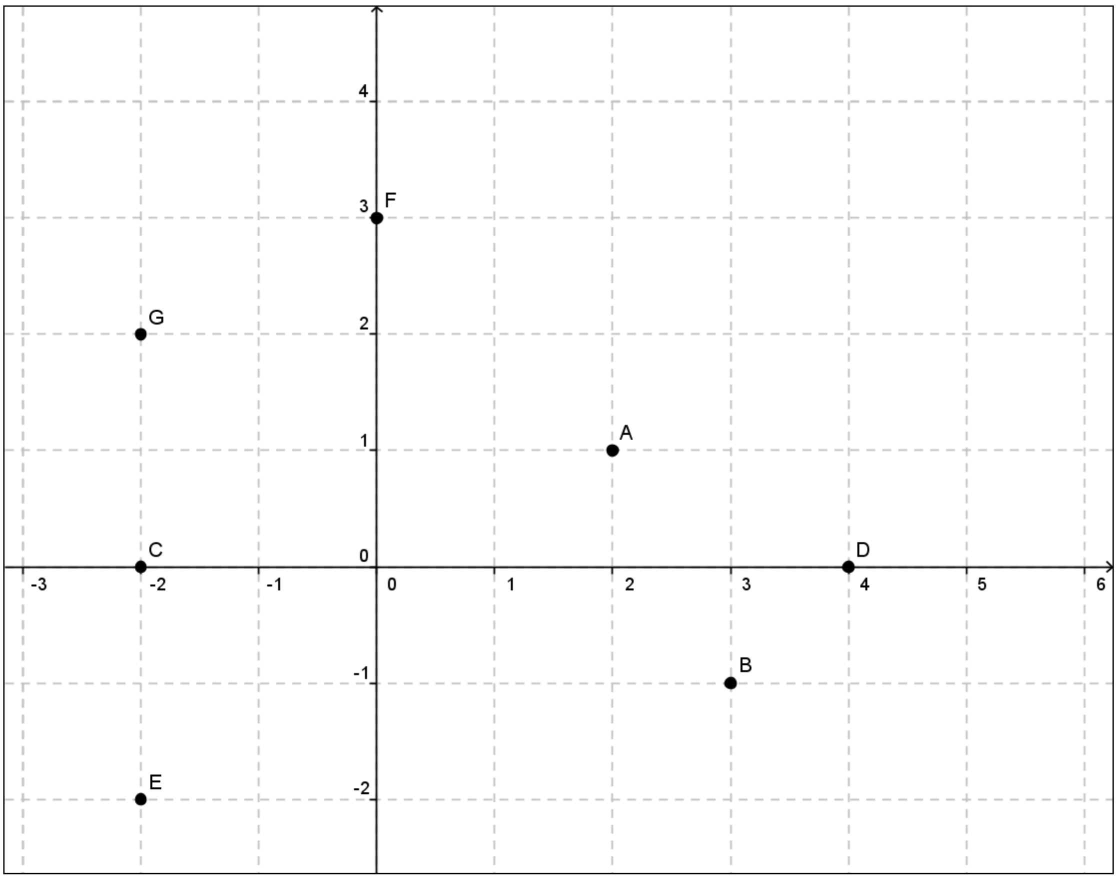
Logo $i^{2050} = i^2 = -1$.

Repare que para calcularmos as potências de i^n é importante sabermos as seguintes potências: $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$.

Agora vamos verificar o que você aprendeu. Resolva os exercícios a seguir e em caso de dúvidas retorne aos exemplos apresentados.

Atividade 2

01. Dê os afixos dos números complexos assinalados no Plano de Argand-Gauss, depois escreva o número complexo correspondente e calcule o seu módulo:



Ponto afixo de z	Números Complexos correspondentes	Módulo do Número Complexo | z|
A (2,1)		
B (3,-1)		
C (-2,0)		
D (4,0)		
E (-2,-2)		
F (0,3)		
G (-2,2)		

02. Marque cada um dos números complexos a seguir no Plano de Argand-Gauss e indique os respectivos afixos:

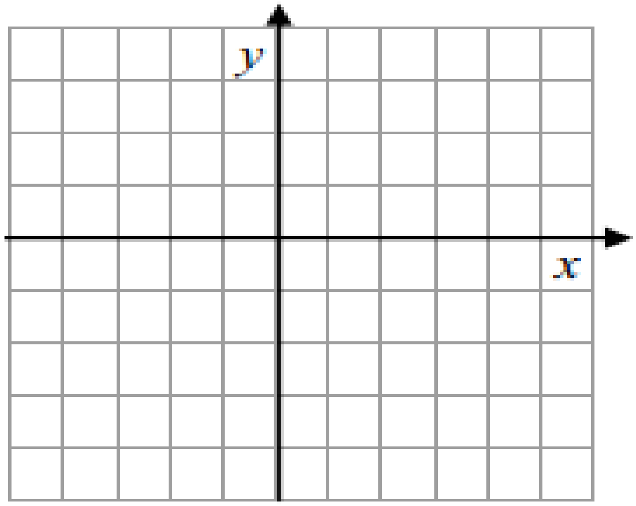
a) $z_1 = 1 + 3i$

b) $z_2 = -2 - 3i$

c) $z_3 = 2 - 4i$

d) $z_4 = -2$

e) $z_5 = 3i$



03. Determine o conjugado dos seguintes números complexos:

a) $z = 1 - i$

b) $z = 5 + 3i$

c) $z = -2 - 2i$

d) $z = 3 - 4i$

e) $z = -5i$

04. Calcule as seguintes potências de i:

a) i^{12} b) i^{549} c) i^{1324}

Aula3: Operações com Números Complexos

Como já vimos, os números complexos são escritos na sua forma algébrica da seguinte maneira: a + bi, onde a e b são números reais. O valor de a é a parte real do número complexo e que o valor de bi é a parte imaginária do número complexo.

Com esses números podemos efetuar as operações de adição, subtração e multiplicação, obedecendo à ordem e às características da parte real e da parte imaginária.

1 —IGUALDADE DE NÚMEROS COMPLEXOS:

Dois números complexos são iguais se forem respectivamente iguais suas partes reais e imaginárias. Assim, dados $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos:

$z_1 + z_2 = a + bi = c + di$, se e somente se, $a = c$ e $b = d$

EXEMPLO 01:

Determine os valores numéricos de x e y de modo que $2x - 5yi = 4 + 15i$.

Resolução:

Igualando as parte reais temos: $2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2$

Por outro lado, igualando as partes imaginárias temos: $5y = 15 \Rightarrow y = \frac{15}{5} = 3$

Logo $x = 2$ e $y = 3$.

2 —ADIÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS:

Dados dois números complexos quaisquer $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, ao adicionarmos teremos:

$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di)$

$= a + bi + c + di$

$= a + c + bi + di$

$= a + c + (b + d)i$

$= (a + c) + (b + d)i$

Portanto, $\boldsymbol{z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i}$.

EXEMPLO 02:

Dado dois números complexos $z_1 = 6 + 5i$ e $z_2 = 2 – i$, calcule a sua soma:

Resolução:

$z_1 + z_2 = (6 + 5i) + (2 – i)$

$= 6 + 5i + 2 – i$

$= 6 + 2 + 5i – i$

$= 8 + (5 – 1)i$

$= 8 + 4i$

Portanto, $z_1 + z_2 = 8 + 4i$.

3 —SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS:

Dados dois números complexos quaisquer $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, ao subtrairmos os dois números teremos:

$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di)$

$= a + bi – c – di$

$= a – c + bi – di$

$= (a – c) + (b – d)i$

Portanto, $\mathbf{z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i}$.

EXEMPLO 03:

Dado dois números complexos $z_1 = 4 + 5i$ e $z_2 = 1 + 3i$, calcule a sua subtração:

Resolução:

$z_1 - z_2 = (4 + 5i) - (1 + 3i)$

$= 4 + 5i - 1 - 3i$

$= 3 + (5 - 3)i$

$= 3 + 2i$

Portanto, $z_1 - z_2 = 3 + 2i.$

EXEMPLO 04:

Vejamos agora um outro exemplo de subtração de dois números complexos. Dado dois números complexos $z_3 = - 2 + 3i$ e $z_4 = 1 + 4i$, calcule a sua subtração:

Resolução:

$z_3 - z_4 = (- 2 + 3i) - (1 + 3i)$

$= - 2 + 3i - 1 - 3i$

$= - 3 + 0i$

$=- 3$

Portanto, $z_3 - z_4 = -3.$

5 —MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS:

Dado dois números complexos quaisquer $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, utilizaremos a propriedade distributiva para multiplicá-los, assim teremos:

$z_1 . z_2 = (a + bi) . (c + di)$

$= ac + adi + bci + bdi^2$

$= ac + adi + bci + bd \quad X(-1)$

$= ac + adi + bci - bd$

$= ac - bd + adi + bci$

$= (ac - bd) + (ad + bc)i$

Portanto, $\mathbf{z_1 . z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i}$.

EXEMPLO 05:

Dado dois números complexos $z_1 = 5 + i$ e $z_2 = 2 - i$, calcule a sua multiplicação:

Resolução:

$z_1 . z_2 = (5 + i) . (2 – i)$

$= 5 . 2 – 5i + 2i – i^2$

$= 10 – 5i + 2i -(- 1)$

$= 10 + 1 – 5i + 2i$

$= 11 – 3i$

Portanto, $z_1 . z_2 = 11 – 3i.$

EXEMPLO 06:

Dado dois números complexos $z_3 = (– 1 + 3 i)$ e $z_4 = (2 + i)1 + 4i$, calcule a multiplicação:

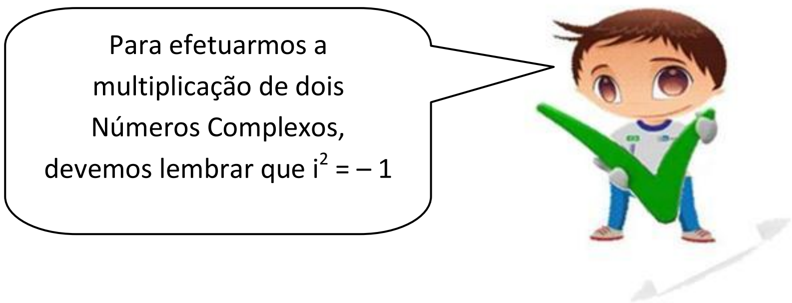
Resolução:

$z_1 . z_2 = (– 1 + 3 i) .(2 + i)$

$= (-1).2 - i + 6i + 3i^2$

$= - 2 – 3 -i +6i$

Portanto, $z_1 . z_2 = -5 + 5 i.$



5 —DIVISÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS:

Para se dividir números complexos, deve-se multiplicar ambos os números pelo conjugado do complexo do denominador. Ou seja, dados z_1 e z_2 para efetuarmos a divisão precisamos calcular da seguinte forma:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1.\bar{z}_2}{z_2.\bar{z}_2}}$$

EXEMPLO 07:

Vamos calcular o valor de $(5 + 3i) : (2 - 7i)$

Resolução:

Para começar vamos multiplicar o divisor e o dividendo pelo conjugado do divisor como explicado acima:

$$(5 + 3i) : (2 - 7i) = \frac{(5 + 3i) \cdot (2 + 7i)}{(2 - 7i) \cdot (2 + 7i)} =$$

Para realizar o produto no denominador vamos recorrer aos produtos notáveis, mais especificamente ao *<u>produto da soma pela diferença de dois termos</u>*, *onde temos que:*

$$(a + b) . (a - b) = a^2 - b^2$$

Continuando o processo da divisão temos:

$$(5 + 3i) : (2 - 7i) = \frac{(5 + 3i) \cdot (2 + 7i)}{(2 - 7i) \cdot (2 + 7i)} = \frac{10 + 35i + 6i + 21i^2}{(2)^2 - (7i)^2} = \frac{-11i + 41i}{53} = -\frac{11}{53} + \frac{41i}{53}$$

Note que inicialmente tínhamos o divisor imaginário 2 – 7i e no final temos o divisor real 53. É por isso que utilizamos o conjugado como expediente para realizar a divisão e assim conseguimos transformar um divisor imaginário em um divisor real.

EXEMPLO 08:

Vamos dividir os números complexos $z_3 = 3+2i$ por $z_4 = 1 +i$.

Resolução:

A divisão $z_1 : z_2$ pode ser calculada da seguinte forma:

$$\frac{3+2i}{1+i}=\frac{(3+2i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)}=\frac{3-3i+2i-2i^2}{1-i^2}=\frac{5-i}{1+1}=\frac{5-i}{2}=\frac{5}{2}-\frac{i}{2}$$

Novamente, observe que inicialmente tínhamos o divisor imaginário 1+i e no final temos o divisor real 2.

Agora vamos verificar o que você aprendeu. Resolva os exercícios a seguir e em caso de dúvidas retorne aos exemplos apresentados.

Atividade 3

01. Determine x e y na igualdade : $6 + 5y = 2x - 10i$.

02. Dados $z_1 = 5 + 2i$ e $z_2 = 3 - 4i$, calcule:

a) $z_1 + z_2$
b) $z_1 - z_2$
c) $z_1 . z_2$

03. Calcule o quociente de (3 + 2i) por (4 - 3i):

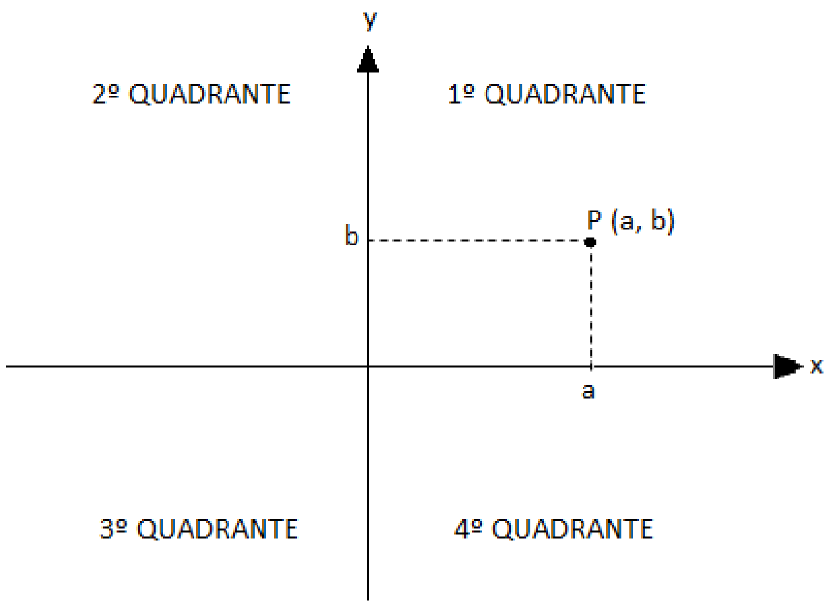
04. Dados z= 3 - 5i, calcular z^2.

Aula 4: Distância entre dois pontos

Caro aluno, neta aula, daremos início ao estudo da geometria analítica, vamos agora fazer uma breve recapitulação do estudo de localização de pontos.

1 —SISTEMA CARTESIANO:

É constituído por duas retas x e y, perpendiculares entre si.



Onde:

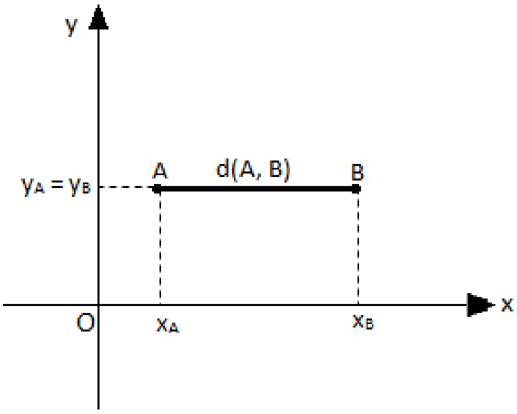
- A reta x é denominada eixo das abscissas;
- A reta y é denominada eixo das ordenadas;
- O ponto O é denominado origem;
- O número real a é denominado abscissa de P;
- O número real b é denominado ordenada e P;
- O par ordenado (a, b) representa as coordenadas de P.

2 —DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS NO PLANO:

A distância entre dois pontos distintos A (x_A, y_A) e $B(x_B, y_B)$ é o número real não negativo d (A,B), também denominado como **comprimento do segmento** $\overline{AB}$.

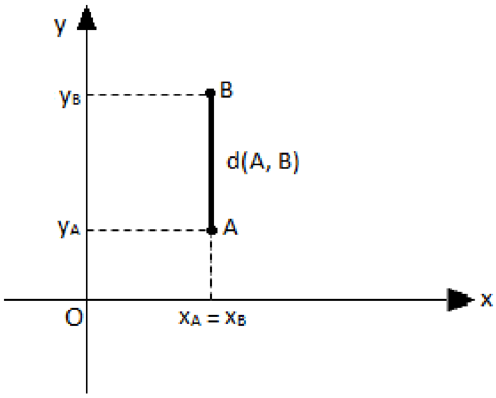
Observe os seguintes casos abaixo:

1º caso: Se $\overline{AB} // \overleftrightarrow{OX}$, então:



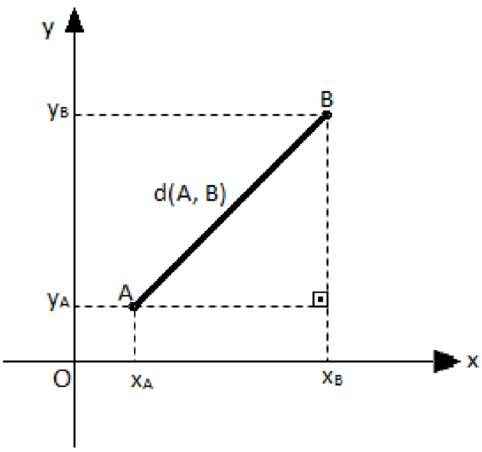
$\Rightarrow$ $d(A, B) = |x_B - x_A|$

2º caso: Se $\overline{AB} // \overleftrightarrow{OY}$, então:



$\Rightarrow$ $d(A, B) = |y_B - y_A|$

3º caso: Se $\overline{AB}$ oblíquo aos eixos, então;



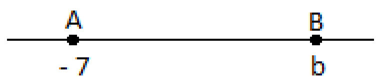
$\Rightarrow$ $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

EXEMPLO 01:

A distância entre dois pontos A e B, localizados sobre o eixo das abscissas, é 10. Sabendo que a abscissa A é - 7, calcule a abscissa de B.

Resolução:

Utilizando o desenho como motivação para ilustrar o problema, temos:



$$d(A, B) = 10 \quad \Rightarrow \quad |b - (-7)| = 10$$

$$|b + 7| = 10$$

Neste teremos duas possibilidades, observe:

$b + 7 = 10$ *ou* $b + 7 = -10$

$b = 3$ $\qquad$ $b = -17$

Logo, a abscissa de B poderá ser 3 ou - 17.

EXEMPLO 02:

Calcule a distância entre os pontos A (5, - 3) e B (0, 9).

Resolução:

Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos, temos:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(0 - 5)^2 + (9 - (-3))^2}$$

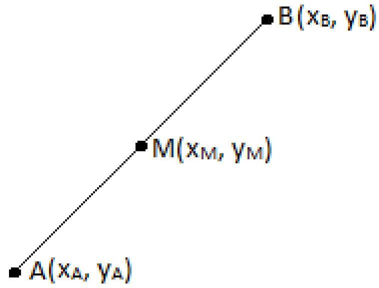
$$d(A, B) = \sqrt{(-5)^2 + (12)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

Logo, a distância procurada é 13 unidades de comprimento.

3 —PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO:

O ponto médio do segmento de reta $\overline{AB}$ de extremos A (x_A, y_A) e $B(x_B, y_B)$ é o ponto que divide o segmento dado em dois congruentes, isto é, de mesma medida é dado por:



$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

Para obtermos a coordenada do ponto médio de um segmento, devemos fazer as médias aritméticas das primeiras e segundas componentes das extremidades do segmento.

EXEMPLO 04:

Determine as coordenadas do ponto médio do segmento de extremidades (5, - 2) e (- 1, - 4).

Resolução:

Para obter as coordenadas do ponto médio procurado basta fazer a média aritmética das componentes das extremidades do segmento conforme a indicação acima, assim:

Sendo M o ponto médio, temos: $M = \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{5 + (-1)}{2} = \dfrac{5 - 1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-2 + (-4)}{2} = \dfrac{-2 - 4}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases}$

Logo, M (2, - 3)

Caro aluno, chegou a hora de praticar!

Resolva as atividades a seguir para exercitar os conhecimentos que você aprendeu.

Atividade 4

01. Calcule a distância entre os pontos A (5, 7) e B (- 2, 7).

02. Determine a distância entre os pontos (2, -1) e (- 1, 3).

03. Calcule o perímetro, em centímetros, do triângulo de vértices A (3, 0), B (3, - 7) e C (27, 0).

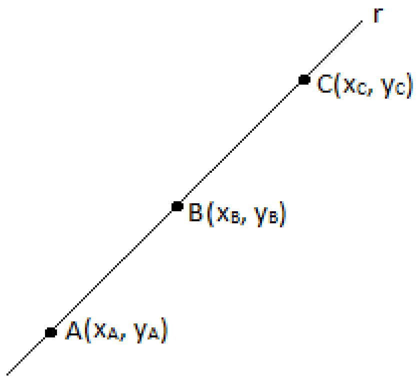
04. Sabendo que o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$ tem coordenadas $x_M = 3$ e $y_M = -2$.

Aula 5: Equação Geral da Reta

Caro aluno, iremos nesta aula a estudar a equação da reta, e para isso devemos em primeira mão, aprender a condição de alinhamento (colinearidade) de três pontos.

1 —ALINHAMENTO DE TRÊS PONTOS:

Sejam os pontos A(xA, yA), B(xB, yB) e C(xC, yC), distintos dois a dois alinhados pela reta r.



A, B e C são ditos colineares, se e somente se, $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$

Se o determinante acima for diferente de zero, diz-se que os pontos são vértices de um triângulo.

Observação:

Caro aluno, vamos agora fazer uma revisão de uma grande ferramenta para a obtenção da equação geral da reta que é o cálculo do determinante de ordem 3. Para calcular este determinante, podemos utilizar a Regra de Sarrus.

A Regra de Sarrus é um dispositivo prático para calcular o determinante de uma matriz de ordem 3 e devemos proceder seguindo os seguintes passos abaixo:

1º Passo: Copiar as duas primeiras colunas da matriz a sua direita;

$$A = \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right]\begin{array}{cc} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

2º Passo: Somar os produtos dos elementos da diagonal principal e das demais diagonais paralelas a ela;

$$A = \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right]\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32})$$

3º Passo: Somar os produtos dos elementos da diagonal secundária e também das diagonais paralelas a ela.

$$A = \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right]\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$(a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12})$$

4º Passo: Agora vamos efetuar a subtração do primeiro somatório pelo segundo somatório, obtendo o determinante como mostramos a seguir:

$$\det A = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) - (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12})$$

Viu como é simples! Observar nos exemplos abaixo a aplicação da Regra de Sarrus na resolução do determinante do 3ª ordem para verificar o alinhamento de três pontos e também na obtenção da equação geral da reta.

Vamos, então, aos exemplos para fixar o conteúdo desta aula.

EXEMPLO 01:

Verifique se os pontos abaixo estão alinhados:

a) A (6, 5), B (3, 4) e C (- 3, 2)

Resolução:

Representando inicialmente o determinante $D = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$*, e em seguida calculando-o de acordo com a regra de Sarrus, temos:*

$D = (6 \cdot 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 3 \cdot 2) - (-3 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 6 + 1 \cdot 3 \cdot 5) =$

$D = (24 - 15 + 6) - (-12 + 12 + 15) =$

$D = 15 - 15 = 0$

Logo, os pontos A (6, 5), B (3, 4) e C (- 3, 2) estão alinhados (são colineares).

b) D (4, 3), E (2, 4) e F (5, - 1)

Resolução:

Representando inicialmente o determinante $D = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix}$*, e em seguida calculando-o temos:*

$D = (4 \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot (-1)) - (5 \cdot 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 3) =$

$D = (16 + 15 - 2) - (20 - 4 + 6) =$

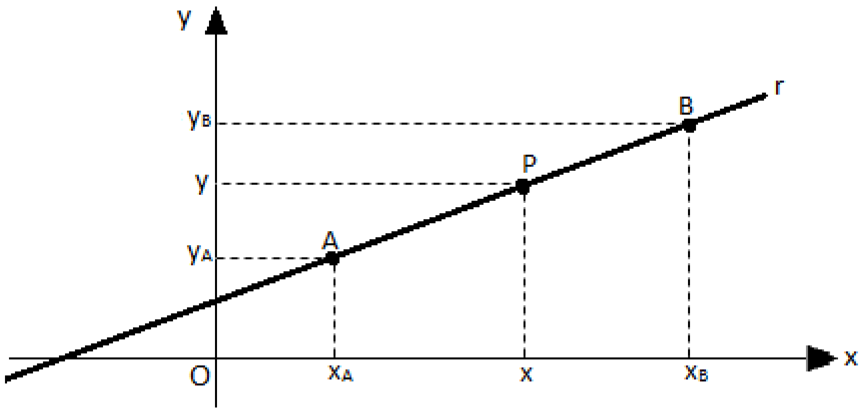
$D = 29 - 22 = 7$

Logo, os pontos D (4, 3), E (2, 4) e F (5, - 1) não estão alinhados (não são colineares), portanto são vértices de um triângulo.

2 —EQUAÇÃO GERAL DA RETA:

Caro aluno, você sabia que uma reta é perfeitamente caracterizada se são conhecidos dois de seus infinitos pontos? Sim, essa afirmação é verdadeira, pois, apenas uma única reta passa pelos pontos distintos A (x_A, y_A), B(x_B, y_B).

Sendo P(x, y) um ponto qualquer dessa reta, teremos ,então, o alinhamento de P com A e B, assim, verifica-se a condição de alinhamento, isto é:



$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo o determinante acima pela Regra de Sarrus, temos:

$$(x \cdot y_A \cdot 1 + y \cdot 1 \cdot x_B + 1 \cdot x_A \cdot y_B) - (x_B \cdot y_A \cdot 1 + y_B \cdot 1 \cdot x + 1 \cdot x_A \cdot y) = 0$$

$$xy_A + yx_B + x_Ay_B - x_By_A - y_Bx - x_Ay = 0$$

Colocando o x e o y em evidência, temos:

$$x(y_A - y_B) + y(x_B - x_A) + (x_Ay_B - x_By_A) = 0 \qquad \textbf{(*)}$$

Vamos fazer as seguintes considerações a fim de tornar a equação acima mais simples:

$a = y_A - y_B$

$b = x_B - x_A$

$c = x_A y_B - x_B y_A$

E substituindo em **(*)**, temos **$ax + by + c = 0$**, chamada **equação geral da reta r**.

EXEMPLO 02:

Obtenha a equação geral da reta r que passa pelos pontos A (2, -1) e B (1, 3).

Resolução:

Para obter a equação da reta r, deve-se resolver o determinante abaixo:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$[x \cdot (-1) \cdot 1 + y \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 3] - [1 \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot x + 1 \cdot 2 \cdot] = 0$$

$$-x + y + 6 + 1 - 3x - 2y = 0$$

$$-4x - y + 7 = 0, \text{ que equivale a } 4x + y - 7 = 0$$

Agora vamos verificar se você aprendeu. Resolva os exercícios abaixo e em caso de dúvidas retorne aos exemplos.

Atividade 5

01. O valor de x para que os pontos (1, 3), (- 2, 4) e (x, 0) do plano sejam colineares é:

(A) 8

(B) 9

(C) 10

(D) 12

(E) 13

02. Os pontos A (k, 0), B (1, - 2) e C (3, 2) são vértices de um triângulo. Então, necessariamente:

(A) k = - 1

(B) k = - 2

(C) k = 2

(D) k $\neq$ - 2

(E) k $\neq$ 2

03. Encontre a equação geral da reta que passa pelos pontos (- 1, - 2) e (- 2, 3).

04. Determine a equação da reta que passa por A (7, 2) e B (3, 6).

Aula 6: Equação Reduzida da Reta

Continuando o estudo de geometria analítica, nesta aula, iremos estudar a uma outra forma de escrever a equação da reta!! A equação da reta pode se apresentar de diferentes formas! Vamos estudar a equação reduzida da reta. Veja como é simples!!

1 —EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA:

Dada a equação geral da reta: $ax + by + c = 0$

Isolando y, temos:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad (*)$$

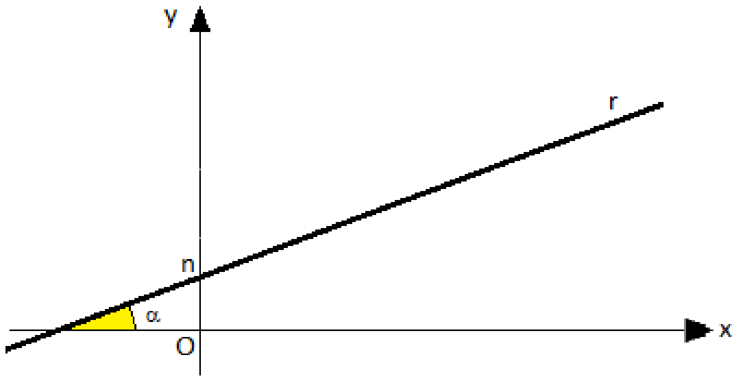
Considerando:

- $m = -\frac{a}{b} \Rightarrow$ **Coeficiente Angular** (É a tangente do ângulo α que a reta forma com o eixo das abscissas)
- $n = -\frac{c}{b} \Rightarrow$ **Coeficiente Linear** (É o ponto exato onde a reta corta o eixo das ordenadas)

Assim, podemos reescrever (*), da seguinte maneira:

$$y = mx + n.$$

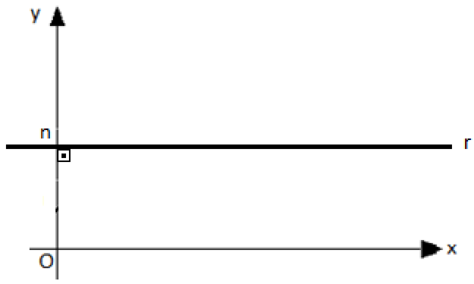
Desse modo, denotamos a equação $y= mx + n$, Equação Reduzida da Reta.



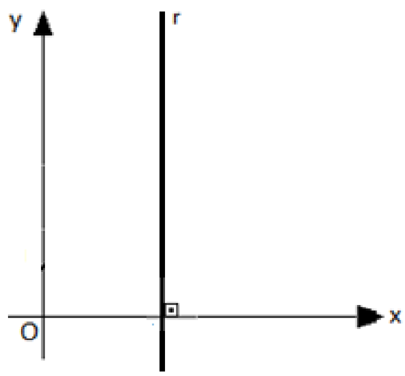
OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

$$\textbf{I —}\; m = -\frac{a}{b} = -\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{y_B - y_A}{x_A - x_B} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad m = tg\alpha = -\frac{a}{b} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

II — Se a reta r é **horizontal**, ela forma ângulo nulo com o eixo das abscissas, isto é, **m = tg 0° = 0** e a equação reduzida da reta torna-se simplesmente **y = n**.



III —Se a reta r é vertical, ela forma ângulo reto com o eixo das abscissas, isto é, m = tg 90°, é impossível escrever a forma reduzida da equação de qualquer reta vertical.



EXEMPLO 01:

Considere os pontos A (- 1, 3) e B (2, 4).

a) Escreva a equação geral da reta $\overline{AB}$.

b) Determine a equação reduzida da reta $\overline{AB}$.

Resolução:

a) Devemos ter:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$- 4x + 3x + 2y - 4x - 6 + y = 0$$

$$- x + 3y - 10 = 0$$

$$x - 3y + 10 = 0$$

b) $x - 3y + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad - 3y = - x - 10 \qquad (- 1)$

$$3y = x + 10$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$$

EXEMPLO 02:

Determine o coeficiente angular e o linear da reta 2x - 3y + 1 = 0.

Resolução:

$$2x - 3y + 1 = 0$$

$$3y = 2x + 1$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$$

Logo, o coeficiente angular é $\frac{2}{3}$ *e o linear é* $\frac{1}{3}$.

Agora vamos verificar se você aprendeu. Resolva os exercícios abaixo e em caso de dúvidas retorne aos exemplos.

Atividade 6

01. Obtenha a equação reduzida da reta que possui coeficiente angular e coeficiente linear respectivamente iguais a - 2 e 8.

02. Dada a equação da reta 2x - 3y + 5 = 0, escreva-a na forma reduzida.

03. A reta t forma um ângulo de 60° com o eixo das abscissas e intercepta o eixo das ordenadas no ponto (0, - 1). Determine a equação reduzida da reta t.

04. A inclinação do segmento de reta que passa pelos pontos A (0, 3) e B(3, 0) é:

(A) + 1

(B) - 1

(C) 0

(D) 3

(E) 1/3

Avaliação

Nesta aula você encontrará algumas atividades para relembrar e aplicar o que estudou até aqui. São atividades simples e com certeza você consegue realizar!

01. Calculando corretamente as raízes da equação $x^2 + 4x + 5 = 0$, encontramos valores complexos para as raízes:

(A) $-2 + i$ e $-2 - i$

(B) $-2 + 4i$ e $-2 - 4i$

(C) $-1 + 2i$ e $-1 - 2i$

(D) $1 + 2i$ e $1 - 2i$

(E) $2 + i$ e $2 - i$

02. No período da "Revolução Científica", a humanidade assiste a uma das maiores invenções da Matemática que irá revolucionar o conceito de número: o número complexo. Rafael Bombelli (1526 – 1572), matemático italiano, foi o primeiro a escrever as regras de adição e multiplicação para os números complexos.

Dentre as alternativas a seguir, assinale aquela que indica uma afirmação **incorreta** é:

(A) o conjugado de $(1 + i)$ é $(1 - i)$

(B) $|1 + i| = \sqrt{2}$

(C) $(1 + i)$ é raiz da equação $x^2 - 2x + 2 = 0$

(D) $(1 + i) - (2 + 2i) = 1 - i$

(E) $(1 + i)^2 = 2i$

03. Qual o é resultado da divisão $\frac{1 + 3i}{1 + i}$:

(A) 1 + 2i

(B) 2 + i

(C) 2 + 2i

(D) 2 + 3i

(E) 3 + 2i

4. A reta da equação 2x + 3y - 5 = 0 intercepta o eixo y no ponto:

(A) (0, 5)

(B) (5/3, 0)

(C) (0, 5/3)

(D) (0, - 5/3)

(E) (0, 5/2)

05. Dados os pontos A (- 1, - 1), B (5, - 7) e C (x, 2), determine x sabendo que o ponto C é equidistante dos pontos A e B.

DICA: Equidistante significa a mesma distância!

Pesquisa

Caro aluno, agora que já estudamos todos os principais assuntos relativos ao 3° bimestre, é hora de discutir um pouco sobre a importância deles. Então, vamos lá!

Leia atentamente as questões a seguir e através de uma pesquisa responda cada uma delas de forma clara e objetiva.

ATENÇÃO: Não se esqueça de identificar as Fontes de Pesquisa, ou seja, o nome dos livros e sites os quais foram utilizados.

I – O vídeo que você assistirá apresenta uma breve história dos números complexos com destaque para os principais personagens envolvidos nesta história. Após a apresentação relate sobre o que você entendeu.

O vídeo está disponível em: http://www.youtube.com/watch?v=iFoG9T2kEmk

____

____

____

____

II – Apresente algumas aplicações práticas dos conhecimentos de Geometria Analítica que você aprendeu:

____

____

____

____

III – Assista ao vídeo sugerido sobre **Forma trigonométrica de um complexo**, e escreva suas observações sobre as definições de afixo, módulo e argumento de um número complexo. O vídeo está disponível em: http://www.gilmaths.mat.br/page_32.html

____

____

____

____

____

____

Referências

[1] IEZZI, GELSON. Fundamentos de Matemática Elementar 7: Geometria Analítica. 3ª ed. São Paulo: Atual, 1985.

[2] IEZZE, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. Matemática e realidade. 6ª. Edição. São Paulo: Atual, 2009.

[3] DINIZ,M.; SMOLE,K. Matemática: Ensino Médio. 6ª. Edição. São Paulo: Saraiva, 2010.

[4] LOPES, M; Tratamento da Informação. Rio de Janeiro: Editora Universitária, IM/UFRJ, 1997.

[5] PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. Diretrizes Curriculares da Educação Básica. Curitiba: SEED, 2006

[6] MARTAIX, M. El Discreto encanto de las matemáticas. Barcelona: Marcombo, 1986.

Equipe de Elaboração

COORDENADORES DO PROJETO

Diretoria de Articulação Curricular
Adriana Tavares Mauricio Lessa

Coordenação de Áreas do Conhecimento
Bianca Neuberger Leda
Raquel Costa da Silva Nascimento
Fabiano Farias de Souza
Peterson Soares da Silva
Marília Silva

COORDENADORA DA EQUIPE
Raquel Costa da Silva Nascimento
Assistente Técnico de Matemática

PROFESSORES ELABORADORES
Ângelo Veiga Torres
Daniel Portinha Alves
Fabiana Marques Muniz
Herivelto Nunes Paiva
Izabela de Fátima Bellini Neves
Jayme Barbosa Ribeiro
Jonas da Conceição Ricardo
Reginaldo Vandré Menezes da Mota
Tarliz Liao
Vinícius do Nascimento Silva Mano
Weverton Magno Ferreira de Castro

Revisão de Texto
Isabela Soares Pereira