Matemática

Aluno

Caderno de Atividades Pedagógicas de Aprendizagem Autorregulada – 03

2° Série | 3° Bimestre

Disciplina	Curso	Bimestre	Série
Matemática	Ensino Médio	3°	2°
Habilidades Associadas			
1. Identificar e representar os mais diversos tipos de matrizes.			
2. Efetuar cálculos envolvendo operações com matrizes.			
3. Calcular determinantes de matrizes quadradas de ordem 2 e 3.			
4. Reconhecer e nomear pirâmides e cones.			
5. Resolver problemas envolvendo o cálculo de área lateral e área total de pirâmides e cones.			
6. Resolver problemas envolvendo o cálculo do volume de pirâmides e cones			

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SOMANDO FORÇAS
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO

Apresentação

A Secretaria de Estado de Educação elaborou o presente material com o intuito de estimular o envolvimento do estudante com situações concretas e contextualizadas de pesquisa, aprendizagem colaborativa e construções coletivas entre os próprios estudantes e respectivos tutores – docentes preparados para incentivar o desenvolvimento da autonomia do alunado.

A proposta de desenvolver atividades pedagógicas de aprendizagem autorregulada é mais uma estratégia pedagógica para se contribuir para a formação de cidadãos do século XXI, capazes de explorar suas competências cognitivas e não cognitivas. Assim, estimula-se a busca do conhecimento de forma autônoma, por meio dos diversos recursos bibliográficos e tecnológicos, de modo a encontrar soluções para desafios da contemporaneidade, na vida pessoal e profissional.

Estas atividades pedagógicas autorreguladas propiciam aos alunos o desenvolvimento das habilidades e competências nucleares previstas no currículo mínimo, por meio de atividades roteirizadas. Nesse contexto, o tutor será visto enquanto um mediador, um auxiliar. A aprendizagem é efetivada na medida em que cada aluno autorregula sua aprendizagem.

Destarte, as atividades pedagógicas pautadas no princípio da autorregulação objetivam, também, equipar os alunos, ajudá-los a desenvolver o seu conjunto de ferramentas mentais, ajudando-o a tomar consciência dos processos e procedimentos de aprendizagem que ele pode colocar em prática.

Ao desenvolver as suas capacidades de auto-observação e autoanálise, ele passa ater maior domínio daquilo que faz. Desse modo, partindo do que o aluno já domina, será possível contribuir para o desenvolvimento de suas potencialidades originais e, assim, dominar plenamente todas as ferramentas da autorregulação.

Por meio desse processo de aprendizagem pautada no princípio da autorregulação, contribui-se para o desenvolvimento de habilidades e competências fundamentais para o aprender-a-aprender, o aprender-a-conhecer, o aprender-a-fazer, o aprender-a-conviver e o aprender-a-ser.

A elaboração destas atividades foi conduzida pela Diretoria de Articulação Curricular, da Superintendência Pedagógica desta SEEDUC, em conjunto com uma equipe de professores da rede estadual. Este documento encontra-se disponível em nosso site www.conexaoprofessor.rj.gov.br, a fim de que os professores de nossa rede também possam utilizá-lo como contribuição e complementação às suas aulas.

Estamos à disposição através do e-mail curriculominimo@educacao.rj.gov.br para quaisquer esclarecimentos necessários e críticas construtivas que contribuam com a elaboração deste material.

Secretaria de Estado de Educação

Caro Aluno,

Neste documento você encontrará atividades relacionadas diretamente a algumas habilidades e competências do 3° Bimestre do Currículo Mínimo. Você encontrará atividades para serem trabalhadas durante o período de um mês.

A nossa proposta é que você, Aluno, desenvolva estes Planos de Curso na ausência do Professor da Disciplina por qualquer eventual razão. Essas atividades foram elaboradas a partir da seleção das habilidades que consideramos essenciais em cada ano/série da 2° Série do Ensino Médio no 3° Bimestre.

Este documento é composto de um texto base motivador para você compreender as principais ideias relacionadas a estas habilidades. Leia o texto e, em seguida, resolva as Ficha de Atividades. Essas fichas devem ser aplicadas para cada dia de aula, ou seja, para cada duas horas-aula. Para encerrar as atividades referentes a cada bimestre, ao final é sugerida uma pesquisa sobre o assunto.

Para cada Caderno de aula, vamos fazer relações direta com todos os materiais que estão disponibilizados em nosso site Conexão Professor, fornecendo desta forma diversos materiais de apoio pedagógico para que o Professor aplicador possa repassar para a sua turma.

Neste Caderno, você vai estudar um pouco sobre matrizes e determinantes. Vamos aprender a operar com matrizes e estudar como elas se relacionam com os determinantes., somatório das séries, prismas, cilindros áreas e volumes de prismas e cilindros.

Este documento apresenta 6 (seis) aulas. As aulas podem ser compostas por uma explicação base, para que você seja capaz de compreender as principais ideias relacionadas às habilidades e competências principais do bimestre em questão, e atividades respectivas. Leia o texto e, em seguida, resolva as Atividades propostas. As Atividades são referentes a um tempo de aula. Para reforçar a aprendizagem, propõe-se, ainda, uma avaliação e uma pesquisa sobre o assunto.

Um abraço e bom trabalho!

Equipe de Elaboração.

Sumário

Aula 1: Reconhecendo Matrizes

Caro aluno, nesta aula você aprenderá a reconhecer matrizes, posteriormente vamos identificar os tipos de matrizes existentes e como realizar algumas operações entre elas. As matrizes constituem um instrumento precioso de cálculo, principalmente com o crescente uso dos computadores nos dias atuais. No entanto, a teoria das matrizes não se limita somente a informática, ela pode ser aplicada também em outros setores como a economia, engenharia, estatística, matemática, física etc.

1– MATRIZES:

Denominamos de matriz m x n (lê-se: m por n) com $m \in N^*$ e $n \in N^*$ qualquer tabela formada por m x n números dispostos m linhas e n colunas.

Você sabia...

Que uma das mais antigas menções sobre matrizes foi encontrada no livro chinês **Nove Capítulos sobre a Arte Matemática,** escrito em 250 a. C.

Um elemento genérico de uma matriz A é simbolizado por $\boldsymbol{a_{ij}}$, em que i indica a linha e j, a coluna a que pertence o elemento.

De forma geral, uma matriz de m linhas e n colunas pode ser representada da seguinte maneira:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Onde:

- a_{11} = elemento localizado na 1° linha e 1° coluna.
- a_{34} = elemento localizado na 3° linha e 4° coluna.

EXEMPLOS:

- $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & -1/2 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2 x 3;

- $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ á uma matriz do tipo 2 x 2;

- $\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$ é uma matriz 1x 2.

Existem matrizes que, por representarem maior utilidade, recebem uma nomenclatura especial. Vamos estudar esses caso com mais detalhes a seguir. Observe como é fácil!

A – Matriz Linha: é a matriz representada por uma única linha.

$$A_{1x3} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1/5 \end{bmatrix}$$

B – Matriz Coluna: é a matriz representada por uma única coluna.

$$B_{3x1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

C – Matriz Nula: é a matriz onde todos os elementos são nulos.

$$C_{2x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D – Matriz Quadrada: é a matriz onde o número de linhas i é igual ao número de colunas j.

$$D_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1/4 & 0 & 9 \\ -6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

E – Matriz Retangular: é a matriz onde o número de linha i é diferente do número de colunas j.

$$E_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

F – Matriz Diagonal: é a matriz quadrada em que todos os termos que não pertencem à diagonal principal são nulos.

$$F_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -0 & -11 \end{bmatrix}$$

G – Matriz Identidade (ou matriz unidade): é a matriz quadrada cujos elementos da diagonal principal valem 1 e os demais elementos são nulos.

$$I_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

H – Matriz Transposta: Considerando a matriz $A_{m\,x\,n}$, a sua transposta será indicada por $A^t_{n\,x\,m}$, neste caso as linhas de $A^t_{n\,x\,m}$ é ordenada conforme as colunas da matriz $A_{m\,x\,n}$.

Se $A_{2\,x\,3} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, a sua transposta será $\boldsymbol{A^t_{3\,x\,2}} = \begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$**.**

I – Matriz Simétrica: é toda matriz igual a sua transposta, isto é, A = A^t

$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ e A^t_{3x3}, são simétricas.

Note que a matriz transposta A é dada por $A^t_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, e dessa forma temos :

$A_{3x3} = A^t_{3x3}$.

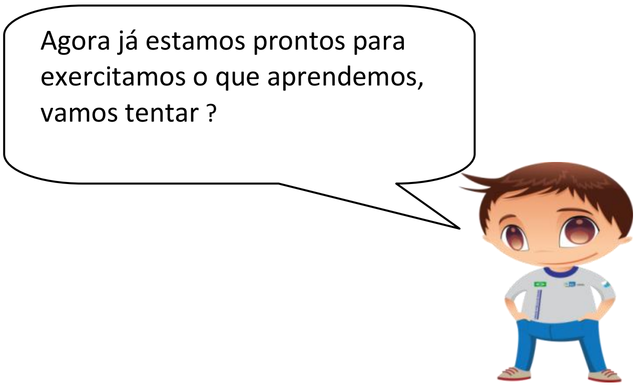
J – Matriz Oposta (– A): é matriz que se obtém de uma matriz dada, trocando-se o sinal de cada um de seus elementos.

Dada a matriz $A_{2x3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -2 & 5 & -1/3 \end{bmatrix}$, a matriz oposta de A será dada por

$-A_{2x3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 2 & -5 & 1/3 \end{bmatrix}$.

K – Matriz Triangular: é toda matriz quadrada cujos termos da acima ou abaixo da diagonal principal são nulos.

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ ou } A_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$



Atividade 1

01. Num torneio de futsal, verificou-se o seguinte resultado de quatro jogadores principais no time de Bola Cheia: Angelo fez 5 gols e deu 10 assistências, cometendo 2 faltas. Herivelto fez 12 gols e deu 8 assistências, cometendo 5 faltas. Vandré fez 10 gols e deu 18 assistências, não cometendo nenhuma falta e; Jonas fez 6 gols e deu 20 assistências, cometendo 7 faltas. Construa a matriz Atleta x Resultados.

02. Dada a matriz A, definida por $A_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, verifique se ela é simétrica, justificando a sua resposta.

03. Dada a matriz A, definida por $A_{3x3} = \begin{bmatrix} 2 & 1/3 & -3 \\ -1/2 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, determine $(-A^t)$.

04. Considerando a matriz $A_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ é possível classificá-la como uma matriz nula? Justifique a sua resposta.

Aula 2: Operações com Matrizes

Caro aluno, na aula anterior você conheceu alguns tipos de matrizes. Nesta aula, você irá aprofundar um pouco mais o seu conhecimento no estudo de matrizes, aprendendo a efetuar cálculos de adição, subtração e multiplicação com matrizes.

1 – ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE MATRIZES:

A adição ou a subtração entre matrizes é realizada de forma muito simples, somando-se ou subtraindo-se os elementos de correspondentes (de mesma posição). Por isso, só é permitido adicionar ou subtrair matrizes de mesma ordem, isto é, com o mesmo número de linhas e de colunas.

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ e B $= \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, vamos determinar a soma entre as matrizes A e B.

Inicialmente é importante observar que as matrizes A e B são matrizes de mesma ordem (3 x2), permitindo assim a realização da adição entre elas.

Assim, temos:

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+2 & 1+6 \\ -2-1 & 0+0 \\ 4+2 & 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -3 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

Viu como é simples!! Agora vamos trabalhar alguns exemplos onde é preciso ter bastante atenção!

EXEMPLO 01:

Determine os valores de a e b, tornando verdadeira a sentença abaixo:

$$\begin{bmatrix} 0 & -a & 3 \\ b & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & b & 3 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

A sentença dada indica uma igualdade. Assim, a partir desta igualdade obtém-se o seguinte sistema: $\begin{cases} b - a = 1 \\ b + a = 5 \end{cases} \rightarrow a = 2 \;\; e \; b = 3.$ Este sistema pode ser resolvido pelo método da substituição, ou seja, considere a 1º equação: b – a = 1. Note que teremos b = (1 + a). Substituindo o valor de b na 2° equação teremos:

b + a = 5

(1 + a) + a = 5

1 + a + a = 5

2a = 5 – 1

a = 4/2

a = 2

Após encontrar o valor de a, para obter o valor de b, basta substitui-lo na 1° equação: b = 1 + a, logo b = 1 + 2. Temos que b = 3

EXEMPLO 02:

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, determine A – B.

Resolução:

Inicialmente é importante observar que as matrizes A e B são matrizes de mesma ordem (3 x2) e que A + B na verdade assume a seguinte representação: A + (– B), ou seja, na verdade será feita a soma entre a matriz A e a matriz oposta de B. (todos os elementos do conjunto B terão seus sinais trocados.)

Assim, temos:

$$A + B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

2 – PRODUTO ENTRE UM NÚMERO REAL E UMA MATRIZ:

Para efetuar o produto entre uma matriz de ordem m x n, por um número real, basta realizar a propriedade distributiva, multiplicando-se todos os termos da matriz dada pelo número real em questão.

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, para determinar o produto 3.A, por exemplo, basta multiplicar todos os termos da matriz 3. Observe:

$$3 \,.\, A = 3.\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 3 \\ -6 & 0 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$$

3 – PRODUTO ENTRE MATRIZES:

Para efetuar o produto entre duas matrizes é necessário, preliminarmente, considerarmos duas matrizes $A_{mxn} = (a_{ij})\ e\ B_{nxp} = (b_{ij})$. O produto entre essas matrizes irá gerar a matriz $C_{mxp=}\ (c_{ij})$, que será obtida pela soma dos produtos dos elementos da linha i , da matriz A, pelos elementos ordenados correspondentes da coluna j, da matriz B.

Achou complicado? Vamos simplificar no decorrer da explicação, o importante é ressaltar que o produto só será possível se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B. Preste bastante atenção aos exemplos:

EXEMPLO 03:

Determine o produto entre as matrizes A e B, sendo A = $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ x B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Resolução:

Para realizar o produto entre as matrizes é necessário observar se o número de colunas da primeira matriz dada é igual ao número de linhas da segunda matriz dada.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow A_{2\,x\,2} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow B_{2\,x\,3}$$

j = i

Logo, esta multiplicação é possível! Então, vamos calcular a multiplicação:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} =$$

De forma mais simples, podemos dizer que os elementos da 1° linha irão multiplicar os elementos de cada uma das colunas da outra matriz. E esses cálculos irão gerar os elementos da 1° linha. De forma análoga, faremos esse calculo para encontrar os elementos da 2° linha.

$$= \begin{bmatrix} 3.1+(-2).2 & 3.2+(-2).3 & 3.3+(-2).4 \\ -1.1+5.2 & -1.2+5.3 & -1.3+5.4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-4 & 6-6 & 9-8 \\ -1+10 & -2+15 & -3+20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 9 & 13 & 17 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 04:

Determine o produto entre as matrizes A = $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1/3 \end{bmatrix}$.

Resolução:

O produto entre as matrizes dadas é impossível, pois o número de colunas da matriz A é diferente do número de colunas da matriz B. Observe:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \to A_{2 \times 3} \qquad \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1/3 \end{bmatrix} \to B_{2 \times 2}$$

$$3 \neq 2$$

Agora, vamos exercitar um pouco!

Atividade 2

01. Determine o produto entre as matrizes a seguir:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1/2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

02. Considerando duas matrizes A e B, sendo A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, verifique se A x B = B x A.

03. Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ e M = A. B. Determine a soma dos elementos da matriz M.

04. Elevar um número ao quadrado é o mesmo que multiplicá-lo por ele mesmo duas vezes. Assim, se A = $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, quanto será A^2?

Aula 3: Calculando Determinantes de Ordens 2 e 3

Olá Aluno! Vamos continuar dando prosseguimento ao nosso estudo de matrizes! Após conhecermos alguns tipos de matrizes e aprendermos como operá-las iremos aprender a calcular o determinante de matrizes de 2 e 3 ordens.

Mas o que são determinantes?

Toda matriz quadrada pode ser associada a um número real denominado determinante, que pode ser calculado obedecendo algumas regras.

Vamos a aula!!

1 – DETERMINANTE DE ORDEM 2:

O determinante de uma matriz de ordem 2, pode ser obtido através da diferença entre os produtos das diagonais. Observe:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow detA = (a_{11}.a_{22}) - (a_{12}.a_{21})$$

Generalizando, podemos afirmar que o determinante de uma matriz de ordem 2 pode ser calculada pela expressão:

det A = (diagonal principal) – (diagonal secundária).

EXEMPLO 01:

Calcule o determinante da matriz definida por $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$:

Resolução:

A matriz em questão é uma matriz quadrada de ordem 2. Neste caso, aplicaremos a seguinte expressão para obter o valor do determinante: det A = (diagonal principal) – (diagonal secundária). Logo, calculando de forma similar:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$ det A = (2 x 1) – (–2 x 2) = 2 – (– 4) → det A = 6

EXEMPLO 02:

Calcule o determinante da matriz transposta de A, sendo A definida por $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$:

Resolução:

A matriz em questão é uma matriz quadrada de ordem 2. Neste caso, é necessário, inicialmente, representar a matriz transposta de A. Então temos: $A^t = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Agora, é só calcular o determinante de A^t:

$$A^t = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$ → det A = (5 x 1) – (2 x 3) = 5 – (6) → det A = -1

2 – DETERMINANTE DE ORDEM 3:

Há algumas maneiras distintas de calcular um determinante de 3ª ordem. Aqui vamos apresentar uma forma bem simples de obter o determinante de uma matriz de ordem 3. Essa forma simples é conhecida como Regra de Sarrus.

A Regra de Sarrus é um dispositivo prático criado pelo matemático francês Pierre Frederic Sarrus (1798 – 1861).

Os passos para solução de uma matriz de ordem 3, pela Regra de Sarrus são:

1º Passo: Copiar as duas primeiras colunas da matriz a sua direita;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

2º Passo: Multiplicar os elementos da diagonal principal e das demais diagonais paralelas a ela;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$(a_{11}.a_{22}.a_{33}) + (a_{12}.a_{23}.a_{31}) + (a_{13}.a_{21}.a_{32})$$

3º Passo: Multiplicar os elementos da diagonal secundária e também das diagonais paralelas a ela, invertendo o sinal do produto.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$-(a_{13}.a_{22}.a_{31}) - (a_{12}.a_{21}.a_{33}) - (-a_{11}.a_{23}.a_{32})$$

4º Passo: Somamos todos os produtos, calculando assim o determinante. Observe:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Daí, temos:

det A = $a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - -a_{11}.a_{23}.a_{32}$

EXEMPLO 03:

Calcule o determinante da matriz transposta de A, sendo A definida por $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

Resolução:

Como trata-se de uma matriz de ordem 3, para resolvê-la iremos aplicar a Regra de Sarrus, vamos seguir os passos acima. A principio, copie as duas primeiras colunas à direita da 3ª coluna, criando duas novas diagonais. Em seguida, multiplicamos os elementos da diagonal principal e das demais paralelas a ela. Depois, multiplicamos os elementos da diagonal secundária e também das diagonais paralelas a ela, invertendo os sinais do seu produto. No último passo, somamos todos os produtos para calcular o determinante. Observamos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{matrix}$$

Calculando temos:

det A = [1x2x(-2)] + (5x2x0) + (1x3x1) – (1x3x0) – (1x2x(-1)) – (5x3x(-2))

det A = –4 + 0+ 3 – 0 – (–2) – (–30)

det A = – 4 + 0+ 3 – 0 + 2 + 30

det A = – 4 + 0 + 3 – 0 + 2 + 30

det A = 29

Agora é hora de exercitar!! Vamos fazer as atividades propostas?

Atividade 3

01. Calcule o determinante das matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 1/2 & 5 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$

02. O valor do determinante da matriz A, representa a idade de Raquel. Considerando que a matriz A é representada por $A = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 1/3 \\ 0 & 2 & -1/5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

03. Calcule o determinante da matriz transposta de A, sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 9 \\ -4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

04. Dadas as matrizes quadradas $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 9 \\ -4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, calcule o produto entre os determinantes das matrizes A e B (det A . det B)

Aula 4: Pirâmides e Cones

Caro aluno, no 1º bimestre aprendemos a diferenciar os poliedros dos corpos redondos e no 2° bimestre aprendemos a diferenciar e reconhecer prismas e cilindros, você se lembra?

Agora iremos continuar nossos estudos abordando outros solidos! Você com certeza já ouviu falar muito sobre eles. As pirâmides e os cones serão o nosso assunto nesta aula!

1 – PIRÂMIDES:

Pirâmides são poliedros em que uma das faces, chamada base, é um polígono, e as outras, chamadas faces laterais, são triângulos com vértice comum.

Figura 1

Assim como os prismas, as pirâmides se classificam de acordo com as formas de suas bases: triangulares, quadrangulares, pentagonais, hexagonais, etc.

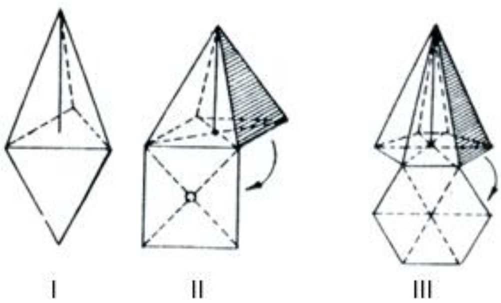


Figura 2

Observe que a pirâmide I possui base triangular, este sólido também é chamado de tetraedro. A pirâmide II apresenta base quadrangular,ou seja o polígono de sua base é um quadrado. De forma equivalente a pirâmide III é uma pirâmide hexagonal pois o polígono da base é um hexágono.

OBSERVAÇÃO:

Uma pirâmide cuja base é um polígono regular e cujas distâncias do vértice V aos vértices da base são iguais é denominada pirâmide regular. Além disso, uma pirâmide pode ser reta ou obliqua. Observe as figuras abaixo:

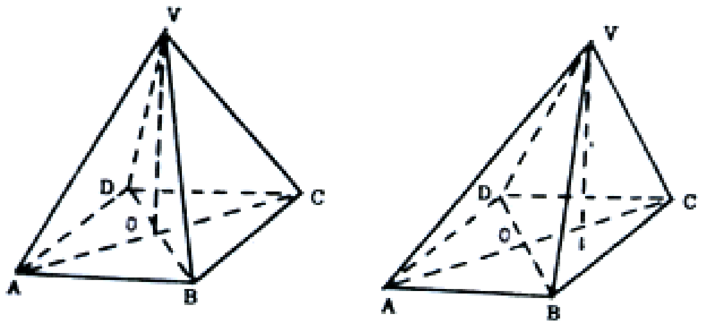


Figura 3

2 – CONE:

O cone é o corpo geométrico obtido ao girarmos um triângulo retângulo ao redor de um dos seus catetos.

Observe a figura abaixo:

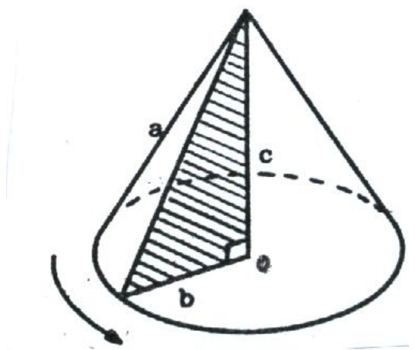


Figura 4

Ao decompormos um cone, obtemos um círculo e um setor circular:

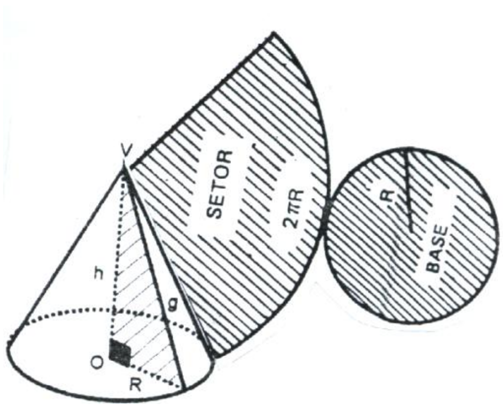
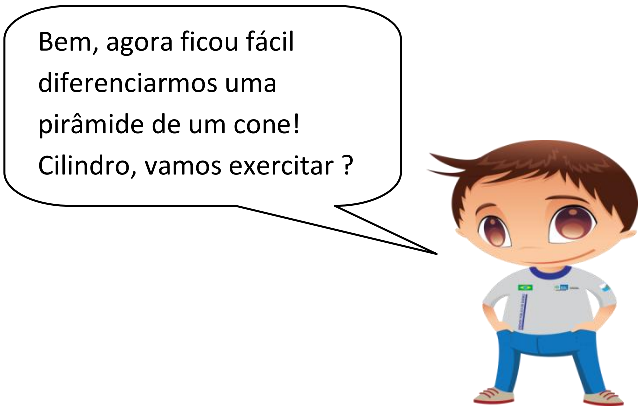


Figura 5



Atividade 4

01. Diferencie pirâmide de cone.

02. Como podemos classificar uma pirâmide?

____

____

____

____

03. Quais são as principais caracteristicas de uma pirâmide?

____

____

____

____

04. Por que o cone pode ser considerado um sólido de revolução?

____

____

____

____

Aula 5: Problemas envolvendo o cálculo de áreas de Pirâmides e cones

Olá Alunos! Continuando o nosso estudo sobre as pirâmides, nessa seção que uma pirâmide pode ter duas áreas bem distintas, a área lateral, que é calculada através de cada face que uma pirâmide possui, e a área total, que como o próprio nome já diz, é o somatório de todas as áreas.

Você com toda certeza já ouviu falar das Pirâmides do Egito, não é mesmo?

Pirâmides do Egito

Figura 6

Os sólidos geometricos não estão restritos somente à sala de aula, por onde andamos podemos observar a representação de alguns desses sólidos.

1 – PIRÂMIDE :

Observe que a pirâmide abaixo possui quatro faces triangulares e uma face (base) quadrangular. Em toda pirâmide temos a área lateral e a área total. Para efetuar o cálculo da área das faces teremos que lembrar alguns conceitos de geometria plana. Nesse caso, vamos precisar calcular as seguintes áreas: **área do triângulo e área do quadrado.**

Vamos relembrar?

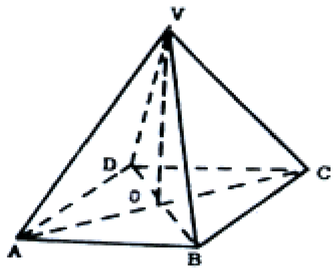


Figura 7

- Área do triângulo equilátero: A = $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$
- Área do quadrado: A = l . l = l^2
- Área do triângulo: A = $\frac{bxh}{2}$

Onde L = lado, B= base, h = altura

A – ÁREA LATERAL DA PIRAMIDE:

Para calcular a área lateal basta somar a área dos poligonos da faces laterais. No caso da figura 7, a área lateral será dada por:

- **Área do triângulo :** $A = \frac{bxh}{2}$

Como a pirâmide possui uma base quadrangular, a pirâmide terá quatro faces laterais. Então, a área lateral será dada por quatro vezes a área do triângulo:

$$A_l = 4.\frac{bxh}{2}.$$

B – ÁREA TOTAL DE UMA PIRÂMIDE:

Para calcular a área total, basta somar a área lateral com a área total! Viu como é simples? Basta somar todas as faces!

$$A_T = A_L + A_B$$

EXEMPLO 01:

Determine a área lateral e a área total de uma pirâmide regular de base quadrada, sabendo que a altura da pirâmide e aresta da base são, respectivamente, 3m e 2m.

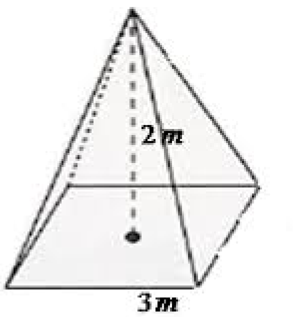
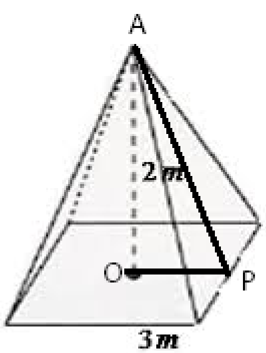


Figura 8

Resolução :

Inicialmente, vamos calcular a área lateral. Para isso é necessário calcular o apótema da pirâmide! Mas, o que é apotema da piramide? É simplesmente a altura do triângulo da face da pirâmide, neste caso, representada pelo segmento AP.



Nesse sentido, utilizaremos o teorema de Pitágoras para calcular a apotema da pirâmide. Assim, temos:

$$(\overline{AP})^2 = (\overline{AO})^2 + (\overline{OP})^{22}.$$

$$(\overline{AP})^2 = 2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \rightarrow (\overline{AP})^2 = 4 + \frac{9}{4} \rightarrow (\overline{AP})^2 = \frac{25}{4}$$

Logo, $\overline{AP}$ = 2,5 m

Agora que conhecemos a apotema do pirâmide, podemos calcular a área do triângulo da face. Então temos:

Área do triângulo = $\frac{\mathrm{lx\ a_p}}{2}$ → Área do triângulo = $\frac{3\mathrm{x}\ 2{,}5}{2}$ = 3,75 m.

Como são 4 faces triangulares, a area lateral será dado por:

$$A_L = 4.\text{Área do Triângulo} = 4\text{x}\ 3{,}75 = 15\ \text{m}^2$$

Para o cálculo da área total devemos levar em consideração o valor obtido para a área lateral ($A_L = 15\ \text{m}^2$) e o valor da área da base. Como o polígono que constitui a base do triângulo é um quadrado, temos:

$$A_B = l^2 \rightarrow A_B = 3^2 \rightarrow A_B = 9\ \text{m}^2.$$

Logo, a área total será dada por:

$$A_T = A_L + A_B \rightarrow A_T = 15 + 9 \rightarrow A_T = 24\ \text{m}^2$$

EXEMPLO 02:

Calcular a área lateral de uma pirâmide hexagonal que possui as seguintes dimensões: apótema da pirâmide igual a 8 cm e aresta da base 3 cm .

Resolução :

Para resolver o problema proposto, inicialmente, devemos calcular a área de uma face do triângulo. Conforme visto no exemplo anterior, a área da face será calculada por:

Área do triângulo = $\frac{\text{apótema da pirâmide x aresta da base}}{2}$

Sendo assim, teremos que:

$$\text{Área do triângulo} = \frac{8 \times 3}{2} \rightarrow \text{Área do triângulo} = 12 \text{ cm}^2$$

Como a pirâmide possui a base hexagonal, para obter a área lateral, basta multiplicar área do triângulo por 6, que é o número de lados do hexágono regular. Logo:

$$A_L = 6.\text{Área do Triângulo} = 6 \times 12 = 72 \text{ cm}^2$$

2 – CONE :

Para calcular a área lateral de um cone, observe a planificação de um cone regular. Note que em sua planificação temos um círculo e um setor de circunferência.

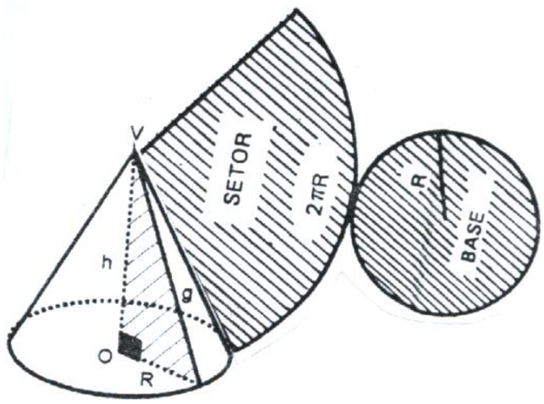


Figura 9

Você já deve ter imaginado como calcular a área lateral e a área total do cone, não é mesmo?

A – ÁREA LATERAL DO CONE :

A área lateral do cone será igual a área do setor circular da figura acima. Vamos relembrar a área do setor circular!

$$\text{Área do setor} = \frac{\text{comprimento do arco x raio do setor}}{2}$$

O comprimento do arco é dado por: C = 2. π . R. Então, a área lateral será calculada através da fórmula:

$$A_L = \frac{2\pi . R . g}{2} \Leftrightarrow A_L = \pi . R . g$$

Observe que o raio do setor circular é chamado de g.

IMPORTANTE: A geratriz g é calculada através da seguinte expressão: $g^2 = h^2 + R^2$

B – ÁREA TOTAL DO CONE :

A área total do cone será determinada pela soma entre a área lateral e a área da base. Como já foi dito, a base do cone é um círculo, então área da base será calculada por: $A = \pi \cdot r^2$. De forma geral, a área total do cone pode ser calculada através da seguinte fórmula:

$$A_T = A_L + A_B \Leftrightarrow A_T = \pi . R . g + \pi . R^2 \Leftrightarrow A_T = \pi . R . (R + g)$$

EXEMPLO 03:

Para um cone reto que tem geratriz g com 5 cm e raio r com base 3 cm, determine a área lateral e a área total.

Resolução:

Vamos calcular inicialmente a área lateral. Como o problema em questão já disponibiliza o valor da geratriz (g = 5 cm) e do raio (r = 3 cm), basta substituir esses valores na fórmula.

Logo: $A_L = \pi . r . g \rightarrow A_L = \pi . 3 . 5 \rightarrow A_L = 15\pi \text{ cm}^2$.

Para o cálculo da Área Total, é necessário determinar a área da base, utilizando a expressão $A_B = \pi . r^2$.

Assim, temos: $A_B = \pi . 3^2 \rightarrow A_B = 9\pi \text{ cm}^2$

Agora, basta somar os valores das áreas lateral e da base para obter o valor da área total do cone.

Logo: $A_T = A_L + A_B \rightarrow A_T = 15\pi + 9\pi \rightarrow A_T = 24\,\pi \text{ cm}^2$

EXEMPLO 04:

Sabendo que em um cone equilátero o raio da base mede $\sqrt{3}$, calcule a área total desse cone.

Resolução:

É importante saber que em um cone equilátero a geratriz tem duas vezes a medida do raio, isto é, g = r^2. Então, teremos:

$$A_T = A_L + A_B \Leftrightarrow A_T = \pi rg + \pi r^2 \Leftrightarrow A_T = \pi r(r + g)$$

Considerando r = $\sqrt{3}$, temos:

$A_T = \pi r(r + g) \rightarrow A_T = \pi.\sqrt{3}\,(\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) \rightarrow A_T = \pi.\sqrt{3}\,(3\sqrt{3}) \rightarrow A_T = 3.\,\pi.\sqrt{3}^2$

Logo: $A_T = 9\pi \text{ cm}^2$

Atividade 5

01. Calcule a área lateral e a área total de um cone reto que possui geratriz igual a 10 cm e raio igual a 6 cm

02. Conhecendo a medida do raio r = 6 dm de um cone equilátero, obtenha:

a) A área lateral

b) A área total

03. Uma pirâmide regular, cuja base é quadrada possui aresta da base igual a 4 cm e apótema da pirâmide medido 9 cm. Determine a área lateral e a área total da pirâmide.

04. Uma pirâmide hexagonal regular possui apótema da pirâmide 12 cm e aresta da base 4 cm. Qual é a área lateral dessa pirâmide?

Aula 6: Volume de Pirâmide e Cone

Olá aluno! Vamos encerrar o nosso estudo sobre pirâmides e cones, com um tema bem interessante: o cálculo de volumes do pirâmide e do cone. Leia a aula com atenção e observe como é simples o cálculo de volumes!

1 – VOLUME DA PIRÂMIDE:

No caso da pirâmide, independentemente do polígono que constitui a base, o cálculo do volume é efetuado da seguinte forma:

$$V = \frac{1}{3} A_B . h,$$

Onde:

- **A_B =** área da base da pirâmide
- **h =** altura da pirâmide.

EXEMPLO 01 :

Qual é a capacidade, em litros, de uma pirâmide quadrangular que possui altura de 20 dm e aresta da base de 12 dm?

Resolução:

Para determinar a capacidade volumétrica da pirâmide, inicialmente, precisamos determinar a área da base.

Sendo a base quadrangular, temos: $A_B = l^2 \rightarrow A_B = 12^2 \rightarrow A_B = 144$ m².

Em seguida, substituimos o valor da área da base na fórmula: $V = \frac{1}{3} . A_B . h$

Logo, temos: $V = \frac{1}{3} . 144 . 20\ A_B \rightarrow V = 960$ dm² $\rightarrow V = 960$ l.

2 – VOLUME DO CONE:

O volume do cone é obtido através da mesma equivalente apresentada, no entanto, em um cone, sempre teremos a área da base sendo um círculo. Desse modo, temos:

$$V = \frac{1}{3} . A_B . h \Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\, \pi . R^2 . h$$

EXEMPLO 02:

Determine o volume de um cone que possui raio da base igual 4 cm e altura igual a 12 cm.

Resolução:

A resolução desta questão é imediata, pois basta fazer a substituição dos valores do raio e da altura do cone na fórmula: $V = \frac{1}{3}\pi . R^2 . h$.

Assim, temos:

$$V = \frac{1}{3}\, \pi . R^2 . h \rightarrow V = \frac{1}{3} . \pi . 4^2 . 12 \rightarrow V = 64\pi \text{ cm}^3.$$

Atividade 6

01. Uma embalagem de suco tem a forma de uma pirâmide quadrangular. Calcule o volume dessa embalagem sabendo que a aresta da base mede 16 cm e a altura da embalagem mede 15 cm.

02. Calcule o volume de uma pirâmide quadrangular cuja aresta da base mede 24 cm e altura da pirâmide mede 15 cm.

03. Determine a capacidade de um recipiente que possui o formato de um cone, cujo raio mede 6m e a altura mede 8m. Adote $\pi = 3{,}14$

04. O volume de um cone é um terço da medida do cilindro, considerando que ambos possuem mesma medida de altura e mesmo medida de raio. Dentro desta proposta, qual será o volume de um cone, sabendo que um cilindro, que possui a mesma medida de raio e a mesma medida de altura, tem volume igual a 210 l?

Avaliação

Caro aluno, chegou a hora de avaliar tudo que nós estudamos nas aulas anteriores. Leia atentamente cada uma das questões e faça os cálculos necessários Vamos lá, vamos tentar?

01. A área total de uma pirâmide regular, de altura 30 mm e base quadrada de lado 80 mm, mede, em mm²:

(A) 44 000

(B) 56 000

(C) 60 000

(D) 65 000

(E) 14 400

02. O volume de uma pirâmide regular quadrangular cujas faces laterais são triângulos equiláteros de 4 cm de lado vale:

(A) $\frac{16\sqrt{2}}{3}\ cm^3$

(B) $\frac{32\sqrt{2}}{3}\ cm^3$

(C) $16\sqrt{2}\ m^3$

(D) $\frac{20\sqrt{2}}{3}$

(E) $32\sqrt{2}\ m^3$

03. Sabendo que o raio da base de um cone equilátero mede 8 mm, qual é a área lateral do cone?

(A) 128 π mm²

(B) 192 π mm²

(C) 198 π mm²

(D) 200 π mm²

(E) 280 π mm²

04. Um cone reto tem 10 cm de altura e 10 cm de diâmetro, determine o volume do cone.

(A) $\frac{250\pi}{3}\ cm^3$

(B) 128 π cm^3

(C) $32\sqrt{2}\ cm^3$

(D) 64π cm^3

(E) 164π cm^3

05. O valor do determinante da matriz A, representa a idade de Izabela. Considerando que a matriz A é representada por $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 1/3 \\ 0 & 2 & -1/5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Quantos anos Izabela tem?

(A) 6

(B) 8

(C) 10

(D) 12

(E) 14

06. Qual é o valor do produto $5.\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

(A) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -15 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -15 & -5 \\ 25 & 10 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$

(E) $\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -3 & -5 \\ 25 & 2 \end{bmatrix}$

Pesquisa

Caro aluno, agora que já estudamos os principais assuntos relativos ao 3° bimestre, é hora de discutir um pouco sobre a importância deles na nossa vida. Então, vamos lá?

Iniciamos este estudo, apresentando as matrizes e determinantes, e posteriormente falando sobre pirâmides e cones, áreas e volumes.

Leia atentamente as questões a seguir e através de uma pesquisa responda cada uma delas de forma clara e objetiva.

ATENÇÃO: Não se esqueça de identificar as Fontes de Pesquisa, ou seja, o nome dos livros e sites nos quais foram utilizados.

I – Apresente alguns exemplos de situações reais nas quais podemos encontrar aplicações de matrizes e determinantes.

____

____

____

____

____

II – Procure em jornais, revistas ou internet exemplos de figuras que se assemelhem a pirâmides e cones.

____

____

____

____

Referências

[1] BARBOSA, João Lucas Marques. Geometria Euclidiana Plana. 10ª edição. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[2] DOLCE, Oswaldo; POMPEU, José Nicolau. Fundamentos da Matemática Elementar, 9: Geometria Plana. 8ª edição. São Paulo: Atual, 2005.

[3] FACCHINI, Walter. Matemática para a Escola de Hoje. São Paulo: FTD,2006.

[4] GARCIA, A.C. de Almeida; CASTILHO, J.C. Amara nte. Matemática sem mistérios: Geometria Plana e Espacial. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2006.

[5] IEZZI, G; [et al]: Matemática: Ciência e aplicação, 2:ensino médio; 6ª. Ed-São Paulo: Saraiva, 2010

[6] MELLO, J. L.P:Matemática, Volume único: Construções e seu significado; 1ª ed- São Paulo: Moderna, 2005

[7] PANADES, R. A. Matemática e suas tecnologias : ensino médio: São Paulo: IBEP, 2005.

[8] Ministério da Educação e Cultura, disponível em: http://www.mec.gov.br

[9] Olimpíada Brasileira de Matemática, disponível em: http://www.obm.org.br

Fonte das Imagens

[1] Figura 1: http://www.infoescola.com/historia/piramides-do-egito/

[2] Figura 2 : http://paulohotale.blogspot.com.br/

[3] Figura 3: http://paulohotale.blogspot.com.br/

[4] Figura 4: http://paulohotale.blogspot.com.br/

[5] Fonte 5: http://paulohotale.blogspot.com.br/

[6] Figura 6: http://www.infoescola.com/historia/piramides-do-egito/

[7] Figura 7: http://paulohotale.blogspot.com.br/

[8] Figura 8: http://www.mundoeducacao.com/matematica/volume-pirâmide

[9] Figura 9: http://paulohotale.blogspot.com.br/

[10] Figura10:

http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividade_diversas/trabalho_winplot/

solidosderevolucao/

Equipe de Elaboração

COORDENADORES DO PROJETO

Diretoria de Articulação Curricular
Adriana Tavares Mauricio Lessa

Coordenação de Áreas do Conhecimento
Bianca Neuberger Leda
Raquel Costa da Silva Nascimento
Fabiano Farias de Souza
Peterson Soares da Silva
Marília Silva

COORDENADORA DA EQUIPE
Raquel Costa da Silva Nascimento
Assistente Técnico de Matemática

PROFESSORES ELABORADORES
Ângelo Veiga Torres
Daniel Portinha Alves
Fabiana Marques Muniz
Herivelto Nunes Paiva
Izabela de Fátima Bellini Neves
Jayme Barbosa Ribeiro
Jonas da Conceição Ricardo
Reginaldo Vandré Menezes da Mota
Tarliz Liao
Vinícius do Nascimento Silva Mano
Weverton Magno Ferreira de Castro

Revisão de Texto

Isabela Soares Pereira